

数学 II 計算力チェック

3年 _____ 組 _____ 番 名前 _____

1. 関数 $y = -x^2 + x + 5$ と直線 $y = 3x + 2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

2. 2つの関数 $y = x^2 - 2x - 8$ と $y = -x^2 + 4$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

1 2つの関数の交点の x から求める。

$$-x^2 + x + 5 = 3x + 2 \text{ として整理して}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \text{ より } x = -3, 1$$

$y = -x^2 + x + 5$ のグラフは上に凸から

$$-3 \leq x \leq 1 \text{ で } -x^2 + x + 5 > 3x + 2$$

よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 \{(-x^2 + x + 5) - (3x + 2)\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - (9 - 9 - 9) \\ &= -\frac{1}{3} + 11 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

2 2つの放物線の交点の x 座標から求める。

連立して

$$x^2 - 2x - 8 = -x^2 + 4 \text{ から、}$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0 \text{ より } x = -2, 3$$

$y = x^2 - 2x - 8$ のグラフは下に凸で、

$y = -x^2 + 4$ のグラフは上に凸より

$$-2 \leq x \leq 3 \text{ で } -x^2 + 4 \geq x^2 - 2x - 8$$

よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 \{(-x^2 + 4) - (x^2 - 2x - 8)\} dx \\ &= \int_{-2}^3 (-2x^2 + 2x + 12) dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 12x \right]_{-2}^3 \\ &= (-18 + 9 + 36) - \left(\frac{16}{3} + 4 - 24 \right) \\ &= -\frac{16}{3} + 47 \\ &= \frac{125}{3} \end{aligned}$$